



امتحانات پایانی در آوردهای برهان

اشاره

وقتی این شماره برهان درمی‌آید، شما دانش‌آموزان برای شرکت در آزمون‌های پایان نیمسال و نهایی، با شور و حرارت مشغول آماده‌سازی خودتان هستید. ما هم برای آنکه با شما همراهی کنیم، تصمیم گرفتیم این بخش را پریارتر کنیم و آن را به نمونه سؤال‌های امتحانی پایان نیم سال درس‌های ریاضی ۲ و هندسه ۱ و امتحانات نهایی سال سوم ریاضی اختصاص دادیم. پاسخ‌ها و راهنمایی‌های این آزمون را در صفحات پایانی مجله ملاحظه کنید.

۲

ریاضی

۱. دنباله هندسی را بنویسید که قدر نسبت و جمله اول آن عددهای طبیعی باشند و جمله چهارم آن ۴۸ واحد از جمله دوم آن بیشتر باشد (۱ نمره).

۲. a، b و c را طوری به دست آورید که $f = \{(a,b), (2,a^2), (a,2a-c), (a+b, a^2), (1, a-b)\}$ تابعی معکوس پذیر باشد و $f^{-1}(1) + f(2) = 1$ باشد آورید (۱/۲۵ نمره).

۳. حدود m را طوری به دست آورید که به ازای همه مقادیر x ، مقادیر کسر $p = \frac{(m+1)x^2 + (3m+1)x + (3m-1)}{x^2 + 2x + 4}$ همواره مثبت باشد (۱/۵ نمره).

۴. نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + x + 1$ را از روی نمودار تابع $f(x) = x^2$ با انتقال رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید (۱ نمره).

۵. اگر $\log_{25}^3 = a$ و $\log_2^3 = b$ به دست آورید (۱ نمره).

۶. حاصل $(\log_{4}^{25}-1)^{\log_{4}^{25}}$ را به دست آورید (۱ نمره).

۷. معادله لگاریتمی زیر را حل کنید (۱/۲۵ نمره):

$$\log(2x+1) - \log(x+2) = \log(3x+4) - \log(4x+3)$$

۸. مقادیری از α را به دست آورید که: $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ و $2\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = 1$ (۱ نمره).

۹. درستی تساوی زیر را ثابت کنید (۲ نمره):

$$\frac{\tan 200^\circ \times \tan 70^\circ - \cos 320^\circ \times \sin 130^\circ}{\tan 160^\circ \times \tan 110^\circ + \sin 340^\circ \times \sin 160^\circ + \sin 70^\circ \times \sin 280^\circ + \cos 320^\circ \times \cos 50^\circ} = \tan 40^\circ$$

۱۰. نمودار تابع با ضابطه $y = 2\sin(\frac{\pi x}{3}) - 1$ را در یک دوره تناب آن رسم کنید و برد تابع را از روی نمودار مشخص سازید (۱/۵ نمره).

۱۱. در مثلث ABC داریم: $BC = 3$ ، $AC = 5$ و $AB = 7$. مطلوب است تعیین (۱/۵ نمره):

(الف) اندازه زاویه \hat{A}
(ب) اندازه زاویه B
(ج) مساحت مثلث

۱۲. دو ماتریس A_1 و A_2 را به دست آورید، به طوری که $A_1 \neq \pm A_2$ و $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (۱/۲۵ نمره).

۱۳. m را طوری به دست آورید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & m-2 \\ m-1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد (۰/۵ نمره).

۱۴. دستگاه معادلات زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید: (۱/۲۵ نمره)

$$\begin{cases} 2x = 3(x - y - 1) \\ 2y = 3(x + y + 1) \end{cases}$$

۱۵. با حروف کلمه «یاسمن» و بدون حق تکرار:

(الف) چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت که شامل حرف «س» باشد؟

(ب) چند کلمه سه حرفی بدون نقطه می‌توان نوشت؟ (۱ نمره).

۱۶. از بین ۴ دانشآموز سال اول، ۵ دانشآموز سال دوم و ۶ دانشآموز سال سوم، به چند طریق می‌توان یک تیم فوتبال ۶ نفره تشکیل داد؛ به شرطی که:

(ب) سومی‌ها در تیم اکثریت داشته باشند (۱ نمره).

(الف) سهم هر پایه در تیم مساوی باشد.

۱۷. مقدار x را از معادله زیر به دست آورید: (۱ نمره)

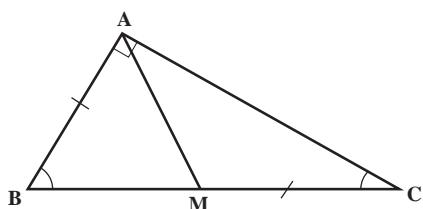
$$c(x, 3) + p(x, 2) = 77$$

۱

هندسه

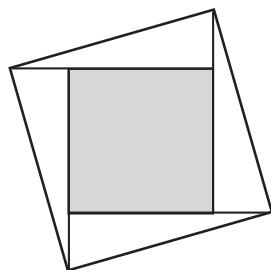
۱. مجموع اندازه‌های چند زاویه مساوی 25° و مجموع متتم‌های آن‌ها 290° است. تعداد این زاویه‌ها را به دست آورید.

(۱ نمره)



۲. ثابت کنید هر ذوزنقه‌ای که دو زاویه مجاور به دو ساق آن با هم برابر باشند، متساوی الساقین است. (۱/۵ نمره)

۳. در شکل مقابل مثلث ABC در رأس A قائم الزاویه است و داریم: $AB = AM = MC$. اندازه‌های زوایای B و C را بیابید. (۱/۵ نمره)



۴. در شکل مقابل چهار ضلعی هاشور زده، مربع و مثلث‌های قائم‌الزاویه اطراف آن همنهشت هستند. درستی قضیه فیثاغورس را به کمک این شکل ثابت کنید. (۱ نمره)

۵. در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$), ارتفاع AH مثلث را به دو مثلث با مساحت‌های 5^2 و 6 واحد سطح تجزیه کرده است. طول‌های اضلاع مثلث را به دست آورید. (۱ نمره)

۶. محیط و مساحت ذوزنقه‌ای را به دست آورید که زوایای حاده آن 30° و 45° و ارتفاع و قاعده بزرگ آن به ترتیب $4 + 4\sqrt{3}$ واحد است. (۱/۵ نمره)

۷. ثابت کنید در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌ها به نسبت تشابه است. (۱/۵ نمره)

۸. در مثلث ABC ، نیم‌ساز زاویه A را در D قطع کرده است. AD را از طرف D تا نقطه E طوری امتداد داده‌ایم که زاویه AEC با زاویه B مساوی شود. ثابت کنید: (۲ نمره)

$$(a) AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

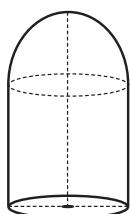
$$(b) AD \cdot AE = AB \cdot AC$$

۹. در ذوزنقه $ABCD$ ، زاویه حاده C دو برابر زاویه حاده D و قطر AC نیم‌ساز زاویه C است. ثابت کنید قطر AC واسطه هندسی بین اندازه‌های دو قاعده است. (۱/۵ نمره)

۱۰. مساحت کل یک مکعب مستطیل مساوی 12 واحد و طول قطر آن $6\sqrt{2}$ واحد است. حجم این مکعب مستطیل را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

۱۱. حجم منشور قائمی را به دست آورید که قاعده آن ذوزنقه متساوی الساقینی با قاعده‌های 14 و 8 واحد و ساق‌های 5 واحد باشد و ارتفاع منشور 10 واحد باشد. (۱/۵ نمره)

۱۲. هرمی با قاعده مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مفروض است. وجههای جانبی آن سه مثلث متساوی‌الساقین با ساق‌های $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ هستند. حجم هرم و زاویه بین ارتفاع هرم و ساق‌های وجههای جانبی آن را بیابید. (۱/۵ نمره)



۱۳. یک کپسول گاز از یک استوانه و یک نیم‌کره روی آن تشکیل شده است. اگر ارتفاع این کپسول 90 سانتی‌متر بوده و مساحت رویه آن 6300π سانتی‌متر مربع باشد، حجم آن را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

۱۴. به کمک دستور حجم کره، دستور مساحت رویه آن را به دست آورید و ثابت کنید. (۱/۵ نمره)

۲

هندسه

۱. ثابت کنید در هر مثلث، هر ضلع از ضلع دیگر بزرگ‌تر است، اگر و فقط اگر زاویه روبرو به آن ضلع از زاویه روبرو به ضلع دیگر بزرگ‌تر باشد (۲ نمره).

۲. ثابت کنید در هر مستطیل، مجموع فواصل هر نقطه روی محیط مستطیل از دو قطر آن مقداری ثابت است (۱/۵ نمره).

۳. ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچک‌تر است (۱ نمره).

۴. ثابت کنید در هر مثلث میانه‌ها در یک نقطه هم‌رسند (۱ نمره).



۵. در مثلث ABC، طول نیمساز رأس A را بر حسب a، b و c، طول های اضلاع مثلث، به دست آورید (۵ نمره).
۶. نقطه ۲ سانچی متراز مرکز دایره (O, ۰, ۵) قرار دارد. طول های بزرگترین و کوچکترین و ترها گذرنده از A را بیابید (۷/۵ نمره).

۷. ثابت کنید در هر دایره، هرگاه از بیرون دایره مماسی بر آن رسم کنیم، طول قطعه مماس واسطه هندسی است بین طول های دو قطعه‌ای که روی هر قاطع که از آن نقطه بر دایره رسم شود، ایجاد می‌شود (۱/۲۵ نمره).

۸. دو دایره (O, a) و (O', ۰, ۲a) مترافقاند. اگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره $\sqrt{6}$ برابر طول مماس مشترک داخلی آن‌ها باشد، کوتاهترین فاصله نقطه دو دایره را بر حسب a به دست آورید (۱/۵ نمره).

۹. اگر تحت بازتاب نسبت به محور $y=4x+7$ تصویر نقطه $A(m, m-1)$ نقطه $A'(n, m+1)$ باشد، m و n را بیابید (۱/۵ نمره).

۱۰. خطوط $2x+3y-7=0$ و $2x+3y+5=0$ مفروض‌اند.

(الف) ضابطه دو انتقال متمایز را بنویسید که تحت آن‌ها d' تصویر d باشد.

(ب) اگر d' بازتاب d نسبت به محور بازتاب L باشد، معادله L را بنویسید.

(ج) مختصات نقطه‌ای مانند M را بیابید که بازتاب d نسبت به آن d' باشد (۲ نمره).

۱۱. ضابطه تجانس به مرکز (۰، ۰) را بیابید که تحت آن، خط $x+y=2$ به خط $x+y=1$ تبدیل شود (۱ نمره).

۱۲. با استفاده از تبدیل‌های هندسی ثابت کنید، در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند (۱ نمره).

۱۳. اگر P_1 و P_2 سه صفحه دو به دو متقاطع باشند، ثابت کنید فصل مشترک‌های این سه صفحه یا سه خط موازی‌اند و یا هر سه از یک نقطه می‌گذرند (۱ نمره).

۱۴. ثابت کنید اگر خطی با سه صفحه متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است. (۱ نمره)

۱۵. ثابت کنید اگر L و L' دو خط متناظر باشند، از هر نقطه مانند A یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر هر دوی آن‌ها عمود باشد. (۱ نمره)

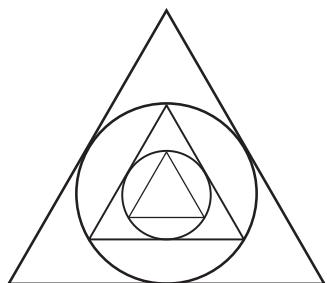
۱۶. ثابت کنید از هر خط L که بر صفحه P عمود نباشد، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر P عمود باشد. (۱ نمره)

حسابان

$$1. \text{ معادله } 2 = \frac{2x+1}{x-1} + \frac{x-2}{2x} \text{ را حل کنید (۱ نمره).}$$

۲. m را طوری به دست آورید که مجموع ضرایب بسط دو جمله‌ای $(2mx+1)^7$ مساوی ۱۲۸ باشد (۷/۵ نمره).

۳. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. سپس در دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری محاط کرده‌ایم و در مثلث جدید، دایره‌ای دیگر محاط کرده و به همین ترتیب ادامه داده‌ایم. مجموع مساحت‌های همه مثلث‌ها را به دست آورید (۱ نمره).



۴. نمودار تابع با ضابطه $y=2|x-1|-|x+1|+x$ را رسم کنید (۱/۲۵ نمره).

۵. آیا توابع زیر برابرند؟ چرا؟ (۷/۵ نمره).

$$\begin{cases} f(x) = \log_a^x & (a > 0, a \neq 1) \\ g(x) = 2\log_a^x \end{cases}$$

۶. اگر داشته باشیم: $\{f(1,0), f(2,1), f(-1,2), f(4,0)\}$ و $\{g(0,1), g(-1,1), g(1,-2), g(4,4)\}$ تابع fog-gof و

$$\frac{g}{f} + \frac{f}{g} \text{ را تشکیل دهید (۵/۰ نمره).}$$

۷. تابع f با ضابطه $f(x) = \log_2 \left(\frac{x-2}{x+2} \right)$ مفروض است.

(الف) دامنه تعریف این تابع را به دست آورید (۵/۰ نمره).

(ب) زوج یا فرد بودن این تابع را بررسی کنید (۵/۰ نمره).

(ج) نشان دهید که این تابع در بازه $(2, +\infty)$ صعودی است (۷۵/۰ نمره).

(د) اگر g تابعی باشد و داشته باشیم: $D_g = [1, 2]$ ، دامنه تابع gof را به دست آورید (۷۵/۰ نمره).

۸. درستی رابطه زیر را ثابت کنید (۷۵/۰ نمره):

$$\sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)$$

۹. معادله زیر را حل کنید (۷۵/۰ نمره):

$$\tan 2x + \tan x = \frac{1}{\cos x \cos 2x}$$

۱۰. مقدار $\frac{3}{5} \sin^{-1}(2 \sin \frac{3}{5})$ را به دست آورید (۷۵/۰ نمره).

۱۱. نمودارهای دو تابع f و g را به طوری رسم کنید که تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ دارای مقدار باشد، ولی حد نداشته باشد و تابع g در همان نقطه مقدار نداشته، ولی حد داشته باشد (۱ نمره).

۱۲. هر یک از حدهای زیر را به دست آورید (۱/۵ نمره):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - 2 \cos x} \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{\sin 2x}$$

۱۳. a و b را طوری به دست آورید که تابع زیر در نقطه $x=1$ پیوسته باشد (۱/۵ نمره):

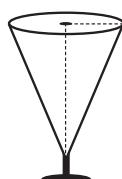
$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\sqrt{x} - a}{bx^2 - b} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \\ a[2x] + b[-x] & x \neq 1 \end{cases}$$

۱۴. با استفاده از تعریف، مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ را در نقطه‌ای به طول ۸ به دست آورید (۱/۵ نمره).

۱۵. مشتق تابع زیر را به دست آورید (۲/۲۵ نمره):

$$(الف) f(x) = \sin \sqrt{x} \cos^2 x \quad (ب) f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos^2 x}$$

$$(ج) f(x) = \sin^{-1}(2 \sin^2 x - 1)$$



۱۶. در یک لیوان آب به شکل مخروط واژگون که شعاع دهانه آن ۱۰ سانتی‌متر و عمق آن ۲۰ سانتی‌متر است، آب می‌ریزیم. آهنگ تغییر حجم آب، وقتی ارتفاع آن در لیوان به ۱۶ سانتی‌متر می‌رسد، چه قدر است؟ (۱/۲۵ نمره).

سؤالات جبر و احتمال

۱. با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید: $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3^n - 1} < \frac{n}{2}$ ۱/۵ نمره
۲. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، مربع هر عدد طبیعی که در تقسیم بر ۵ باقیمانده ۳ داشته باشد، در تقسیم بر ۵ باقیمانده ۴ دارد ۱ نمره.
۳. ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی و مثبت باشند، آن‌گاه ۱ نمره:
- $$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
- (به کمک استدلال بازگشتی)
۴. می‌دانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. به کمک برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ عددی گنگ است ۱ نمره.
۵. حکم کلی نادرست زیر را یک مثال نقض رد کنید ۰/۵ نمره: «برای هر دو عدد گنگ، مجموع یا حاصل ضرب آن‌ها همواره عددی گنگ است.»
۶. پنج عدد طبیعی داریم که عوامل اول همه‌آن هفقط ۲ و ۳ است. ثابت کنید حاصل ضرب دو تالاز آن‌ها مربيع کامل است ۱ نمره.
۷. اگر داشته باشیم: $A = \{x \in Z \mid |x - 1| \leq 2\}$ و $B = \{x \in Z \mid x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$ ، مجموعه $A \Delta B$ را با اعضای خود نمایش دهید ۱ نمره.
۸. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها نشان دهید ۱ نمره:
- $$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$
۹. اگر داشته باشیم: $A = \{x \in Z \mid 1 < 2^x < 10\}$ و $B = \{x \in R \mid x^2 + x \leq 2\}$ مشخص کنید و نمایش هندسی بدهید ۱/۲۵ نمره.
۱۰. رابطه زیر در مجموعه R تعریف شده است:
- $$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^z + t^z = y^z + z^t$$
- نشان دهید R یک رابطه همازی است و کلاس همازی $[(1, -1)]$ را مشخص کنید ۱/۷۵ نمره.
۱۱. یک تاس را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا مجموع عددهای ظاهر شده از ۲ بیشتر شود (و در آنجا پرتاب رامتوقف می‌کنیم). اکنون:
- (الف) فضای نمونه را مشخص کنید.
- (ب) پیشامد A را مشخص کنید که در آن تاس سه بار پرتاب شده باشد.
- (ج) پیشامد B را مشخص کنید که در آن مجموع اعداد رو شده بیشتر از ۴ باشد.
- (د) پیشامد $A \cap B$ را مشخص کنید ۱ نمره.
۱۲. در یک کیسه ۵ مهره سیاه به شکل‌های دایره، مثلث، مربع، مستطیل و لوزی و ۵ مهره سفید به همان شکل‌ها و اندازه‌ها وجود دارد. اگر ۵ مهره را به تصادف از این کیسه خارج کنیم، احتمال آن را بدست آورید که هیچ مهره سفیدی بدون حضور مهره هم‌شکل آن (به رنگ سیاه) خارج نشود ۱/۵ نمره.
۱۳. ده لامپ توسط ده کلید جداگانه روشن و خاموش می‌شوند. اگر در یک لحظه کسی به تصادف لامپ‌ها را روشن و خاموش کند، احتمال آن را بدست آورید که لااقل هشت لامپ روشن شود ۱ نمره.
۱۴. دو قطار در فاصله زمانی ساعت ۱۲ تا ۱۳ دقیقه به ایستگاه می‌رسند. قطار اول پس از ۱۰ دقیقه توقف و قطار دوم پس از ۱۵ دقیقه توقف حرکت می‌کند. احتمال آن را بدست آورید که دو قطار یکدیگر را در ایستگاه ملاقات کنند ۱/۵ نمره.
۱۵. تاسی به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد اول در پرتاب آن سه برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. احتمال آن را بدست آورید که در دوبار پرتاب این تاس، هر دوبار عددی کوچک‌تر از ۴ رو شود ۱/۵ نمره.
۱۶. یک عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بدست آورید که:
- (الف) این عدد مضرب ۵ باشد و مضرب ۶ نباشد.
- (ب) نه مضرب ۴، نه مضرب ۵ و نه مضرب ۶ باشد ۱ نمره.